

# **MOVIMIENTO BROWNIANO Y GEOMETRÍA FRACTAL: EL IBEX35**

Jesús Muñoz San Miguel

*Universidad de Sevilla*

## **RESUMEN**

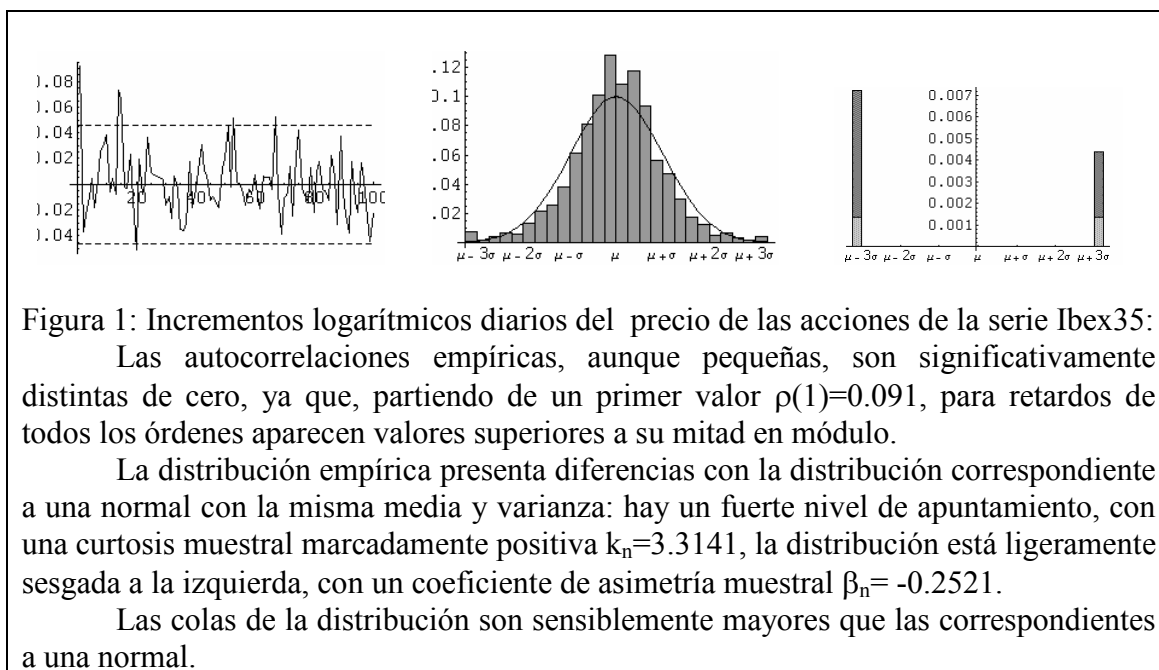
El movimiento browniano, caracterizado por la independencia y la normalidad de la distribución de sus incrementos, es uno de los modelos más utilizados para describir el precio de una acción. Sin embargo, los datos empíricos no se ajustan bien del todo en la serie Ibex35, que es como nos referiremos a la serie de los logaritmos de los cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa (desde el día 2-01-1991 hasta el día 29-12-2000), ya que, en esta serie los incrementos de los precios presentan cierta dependencia y su distribución empírica difiere de la distribución normal.

En los años sesenta, Benoît B. Mandelbrot (1924-), al que se considera como el padre de la Geometría Fractal, propuso dos generalizaciones del movimiento browniano para modelizar la evolución de los precios de un activo financiero: los movimientos brownianos fraccionarios y los movimientos L-estables. En este trabajo se compara la dimensión fractal de las gráficas de la serie Ibex35 con las de estas generalizaciones y se analizan las consecuencias a la hora de describir como un proceso estocástico este tipo de series temporales.

**Palabras clave:** Serie temporal, proceso estocástico, movimiento browniano, movimiento L-estable, dimensión fractal.

## 1. ANTECEDENTES

El movimiento browniano, caracterizado por la independencia y normalidad de la distribución de sus incrementos, fue uno de los primeros modelos utilizados para describir la evolución de una serie temporal como un proceso estocástico, ya que apareció por primera vez asociado a los precios de una acción en 1900 en la tesis de Louis Bachelier “Theory of speculation”. Sin embargo, no cobró importancia hasta que en 1965 el premio nobel en Economía Paul A. Samuelson (1915-), basándose en la idea de trabajar con los logaritmos de los precios que aparecía en 1959 en un artículo de M. F. M. Osborne, “Brownian motion in the stock market”, propuso el movimiento browniano geométrico o económico en el cual los logaritmos de los precios son los que siguen un movimiento browniano con tendencia. Aunque desde entonces es uno de los modelos más utilizados para describir el precio de una acción, los datos empíricos no se ajustan bien del todo al modelo, ya que los incrementos de los precios de la mayoría de las acciones presentan cierta dependencia y su distribución empírica difiere de la distribución normal (figura 1).



En los años sesenta, Benoît B. Mandelbrot (1924-), al que se considera como el padre de la Geometría Fractal, propuso dos generalizaciones del movimiento browniano para modelizar la evolución de los precios de un activo financiero: los movimientos brownianos fraccionarios, que sólo tienen incrementos independientes en el modelo original, y los movimientos L-estables, con incrementos independientes y distribuidos según una distribución estable que generaliza a la normal. Ambas generalizaciones tienen diferencias esenciales, pero sus grafos comparten dos características típicas de los conjuntos fractales que nos van a permitir estudiarlos de forma conjunta (figura 2):

- La autoafinidad estadística, que hace que los grafos que se obtienen cuando se reduce la escala temporal para representarlos tengan una apariencia similar.
- El valor no entero de su dimensión, que nos permitirá caracterizar el proceso al tener en cuenta que la dimensión está relacionada con las variaciones que los

grafos experimentan entre puntos próximos, de tal forma que cuanto mayor sea el valor de la dimensión mayores serán estas variaciones.



Figura 2: Al representar la serie Ibex35 se obtiene un grafo con una apariencia errática e irregular que no admite una aproximación lineal. Cuando la representamos en intervalos de tiempo de duración decreciente este comportamiento se mantiene con independencia de la escala y los grafos muestran, en cierto sentido, una apariencia similar.

## 2. DIMENSIÓN FRACTAL

La dimensión fractal de un conjunto está relacionada con la forma de asignarle un tamaño numérico que refleje su medida a distintas escalas, por lo que dependiendo de la forma en que se aborde el problema aparecen distintos conceptos. De entre todos, vamos a utilizar el concepto de dimensión de recuento por cajas, que surge cuando al estudiar el comportamiento del número mínimo de conjuntos de diámetro  $\delta$  necesarios para recubrir a un conjunto se observa que para valores decrecientes de  $\delta$  este número crece proporcionalmente a  $\delta^{-D}$  (otras definiciones y su relación con ésta, al igual que los resultados que utilizaremos en esta sección, se pueden consultar, por ejemplo, en Falconer 1990 o en Muñoz 2002).

**Definición 2.1:** Sean  $(X,d)$  un espacio métrico y  $F \subseteq X$ , compacto y no vacío.

Sea  $N(\delta, F)$  el menor número de conjuntos de diámetro  $\delta$  necesarios para recubrir a  $F$ , definimos la **dimensión de recuento por cajas** como

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta, F)}{-\log \delta}$$

si tal límite existe (supondremos que existe el límite, ya que en el caso de que no exista se pueden utilizar tanto el límite superior como el inferior). ♣

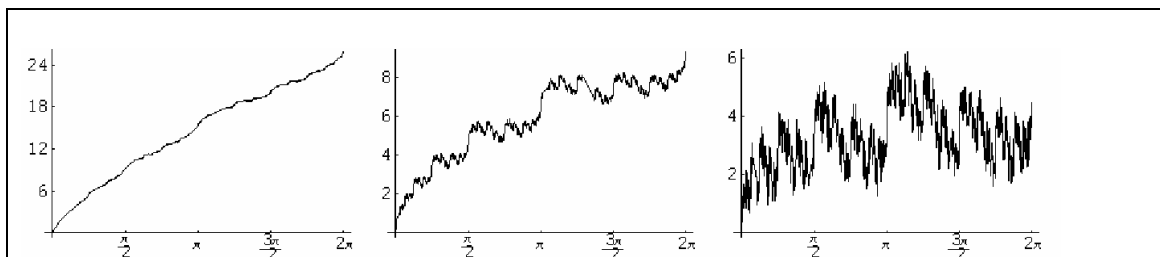


Figura 3: La representación del grafo de funciones con dimensiones 1.25, 1.50 y 1.75 muestra que las variaciones que experimentan los valores de una función entre puntos

próximos están relacionadas con el valor de su dimensión, de tal forma que cuanto mayor es éste más errático es el comportamiento de la función.

En el caso particular de un subconjunto plano, se obtiene una definición de dimensión equivalente si tomamos como  $N(\delta, F)$  el número de cuadrados de una  $\delta$ -malla que cortan al conjunto, lo que hace que el procedimiento para el cálculo empírico de la dimensión comience por su representación gráfica en un rectángulo. A continuación se consideran sucesiones de la forma  $\delta_k = C/2^k$  y se toman los valores de  $\delta$  comprendidos dentro de un rango de escalas que queda determinado al elegir unos valores mínimos y máximos para  $k$ . Para cada uno de estos valores se divide el rectángulo en cajas de lado  $\delta$  formando una  $\delta$ -malla sobre la que se cuenta el número de cajas que cortan al conjunto,  $N(\delta, F)$ . Si este conjunto tiene dimensión  $D$ , cuando  $\delta$  tiende a cero el número de cajas de la  $\delta$ -malla que cortan al conjunto crece proporcionalmente a  $\delta^{-D}$ ,  $N(\delta) \approx c\delta^{-D}$ , con lo que si tomamos logaritmos,

$$\log N(\delta) \approx \log c - D \log \delta \quad (2),$$

podemos obtener la dimensión como la pendiente de la recta que aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, a los pares  $(-\log \delta, \log N(\delta))$  obtenidos (figura 4).

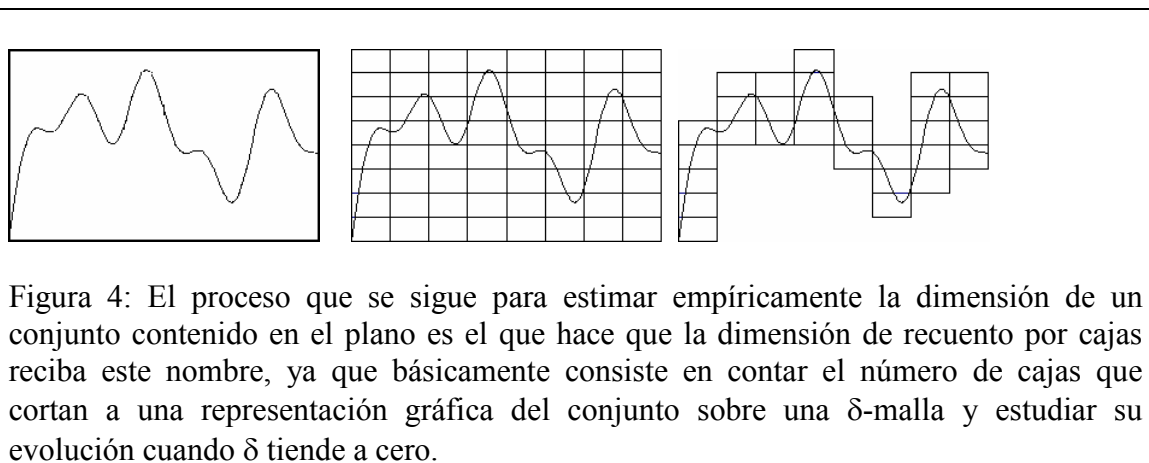


Figura 4: El proceso que se sigue para estimar empíricamente la dimensión de un conjunto contenido en el plano es el que hace que la dimensión de recuento por cajas reciba este nombre, ya que básicamente consiste en contar el número de cajas que cortan a una representación gráfica del conjunto sobre una  $\delta$ -malla y estudiar su evolución cuando  $\delta$  tiende a cero.

En la serie Ibex35, hemos estimado el número de cajas que cortan al grafo sobre cada intervalo de longitud  $\delta$  como el cociente entre el rango de la serie en el intervalo y  $\delta$  (un análisis exhaustivo de esta estimación se puede ver en Muñoz 2002 pp. 125-148). Después hemos calculado los valores de la dimensión que aparecen al tomar distintos valores mínimos y máximos de  $k$ . Al considerar como dimensión del grafo su valor medio y como error la desviación absoluta media, se obtiene:

$$D = 1.3663 \pm 0.0202.$$

### 3. AUTOAFINIDAD ESTADÍSTICA

Un proceso estocástico autoafín es un proceso en el que al cambiar la escala temporal se obtiene un proceso cuyas distribuciones finito dimensionales sólo difieren de las del proceso original en la escala espacial:

**Definición 3.1:** Un proceso estocástico  $\{X(t), t \in T\}$  que comienza en el origen (casi seguro) es un **proceso autoafín** si:

$$\forall a > 0 \exists b > 0 \text{ tal que } \{X(at)\} \cong \{bX(t)\} \quad \forall t: t, at \in T \quad \clubsuit$$

En todo lo que sigue supondremos, para eliminar los procesos que no son más que una tendencia, que el proceso es no trivial y, por razones técnicas, que el proceso es estocásticamente continuo, en  $t$  para todo  $t \in T$ . Bajo estas hipótesis, el cambio de escala espacial,  $a$ , y el cambio de escala temporal,  $b$ , verifican una relación de tipo exponencial,  $b=a^H$  (Lamperti 1962):

**Teorema 3.2:** Sea  $\{X(t), t \in T\}$  un proceso estocástico autoafín que comienza en el origen (casi seguro), no trivial y estocásticamente continuo (en  $t \forall t \in T$ ).

Existe un único  $H > 0$ , que recibe el nombre de **exponente de autoafinidad** del proceso, tal que

$$\forall a > 0 \quad \{X(at)\} \cong \{a^H X(t)\} \quad \forall t: t, at \in T \quad (5)$$

Para explicitar el valor de  $H$  diremos que el proceso es  $H$ -autoafín

♣

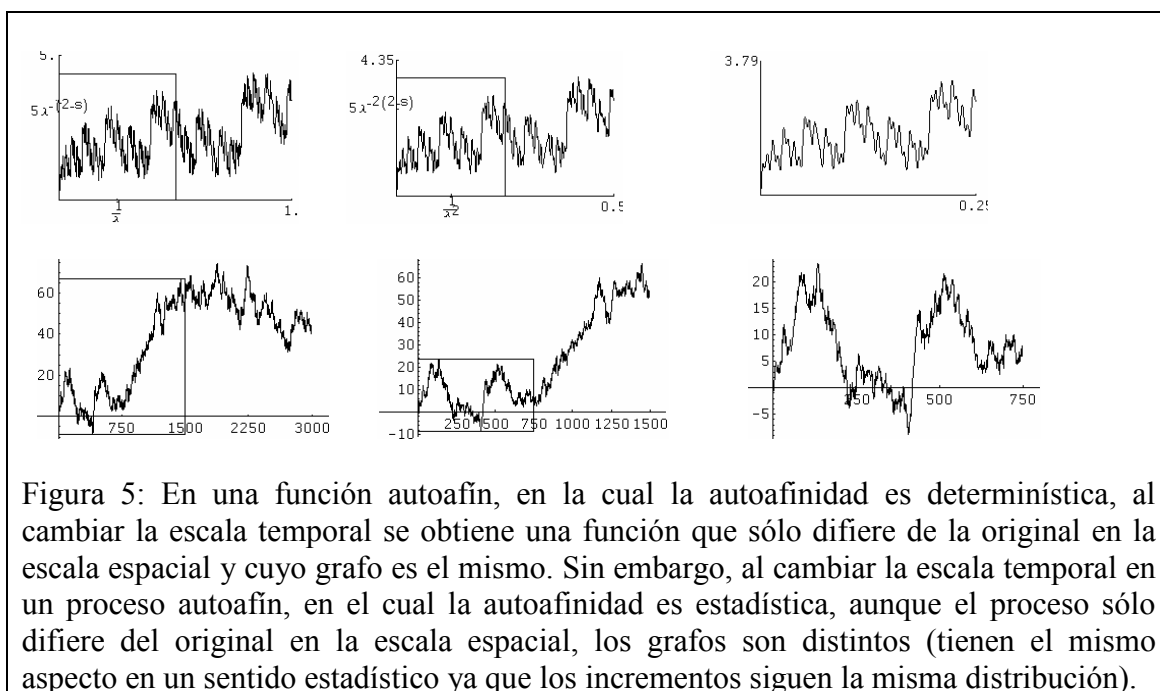


Figura 5: En una función autoafín, en la cual la autoafinidad es determinística, al cambiar la escala temporal se obtiene una función que sólo difiere de la original en la escala espacial y cuyo grafo es el mismo. Sin embargo, al cambiar la escala temporal en un proceso autoafín, en el cual la autoafinidad es estadística, aunque el proceso sólo difiere del original en la escala espacial, los grafos son distintos (tienen el mismo aspecto en un sentido estadístico ya que los incrementos siguen la misma distribución).

### 3.1. Procesos Autoafines con Incrementos Estacionarios

En un proceso autoafín con incrementos estacionarios, la relación entre la distribución del proceso en un instante cualquiera con la distribución del proceso en un instante concreto hace que las esperanzas, varianzas y covarianzas del proceso sólo dependan del exponente de autoafinidad y de la distribución del proceso en ese instante, de forma que serán finitas siempre y cuando lo sean en un instante concreto. Además, si la esperanza del proceso es finita y suponemos que el exponente de autoafinidad del proceso verifica  $0 < H < 1$  esta esperanza será nula y si el proceso tiene varianza finita las covarianzas entre los distintos instantes del proceso están determinadas por su exponente de autoafinidad y coinciden con las de un movimiento browniano fraccionario del mismo índice; lo que hace que para el estudio de la dependencia de los

procesos autoafines a través de las covarianzas podamos centrarnos en el movimiento browniano fraccionario que veremos posteriormente

Por otra parte, en un proceso autoafín con incrementos estacionarios, salvo por escala, la distribución de un proceso autoafín tiene que ser la misma en todos los instantes del proceso y los incrementos correspondientes a intervalos de distinta duración tienen que tener la misma distribución. Desde este punto de vista, los movimientos brownianos, tanto el clásico como los fraccionarios, no son adecuados para describir la evolución de la serie Ibex35 como un proceso autoafín, ya que en todos los casos aparecen diferencias con la distribución normal, que es la distribución que siguen los incrementos de un movimiento browniano, tanto clásico como fraccionario (figura 6).

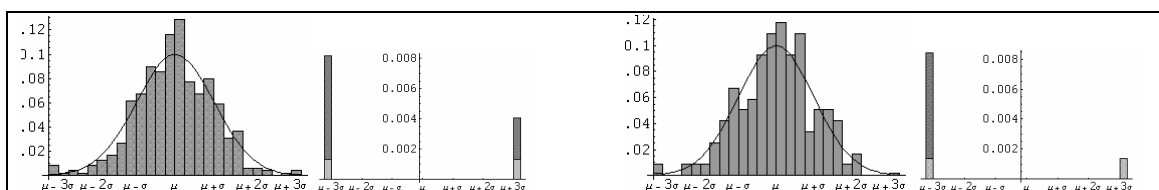


Figura 6: Las diferencias de la distribución empírica de los incrementos logarítmicos de los cierres semanales y mensuales de la serie Ibex35 con la distribución que correspondería a una normal con igual media y varianza son las mismas que aparecían en los cierres diarios: gran parte de la distribución se agrupa en torno a la media, está sesgada a la izquierda y sus colas son mayores que las correspondientes a la normal.

### 3.2. Procesos Autoafines Normales

En un proceso cuyas distribuciones finito dimensionales son normales, proceso gaussiano, las esperanzas y varianzas siempre son finitas y las distribuciones finito dimensionales sólo dependen de las medias, varianzas y covarianzas. Como un proceso H-autoafín gaussiano con  $0 < H < 1$  queda determinado, salvo escala, por su exponente de autoafinidad, un proceso H-autoafín gaussiano con incrementos estacionarios tiene que ser un movimiento browniano fraccionario de índice H cuya varianza es proporcional al incremento temporal, movimiento browniano clásico, o a una potencia suya, movimiento browniano fraccionario

Al analizar la consistencia de la hipótesis de normalidad estudiando el comportamiento con respecto a la escala temporal de la media y varianza de los incrementos de la serie Ibex35 se observa que, aunque las medias muestran una tendencia lineal que parece indicar que sería posible representar la serie como la suma de una tendencia y un proceso con media cero, el comportamiento de la varianza es errático, lo que no sucedería si este proceso fuese un movimiento browniano, ya que la varianza debería ser proporcional al incremento temporal o a una potencia suya (figura 19).

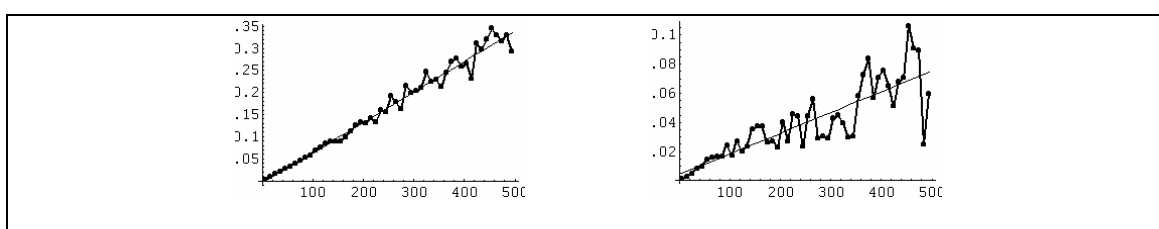


Figura 7: Si en la serie Ibex35 consideramos periodos cada vez mayores, las medias siguen una tendencia lineal pero el comportamiento de la varianza es errático.

### 3.3. Procesos Autoafines con Incrementos Independientes

Dentro de los procesos con incrementos estacionarios, cuando consideramos procesos con incrementos independientes hablamos de procesos de Lévy:

**Definición 3.3** Un proceso estocástico real que comienza en el origen casi seguro y es estocásticamente continuo en  $t$ ,  $\forall t \in T$ , es un **proceso de Lévy** si:

- tiene incrementos estacionarios,
- tiene incrementos independientes.

♣

Las distribuciones estables, que son una generalización de la normal son las únicas posibles en los procesos de Lévy que presenta la característica fractal de autoafinidad estadística (Embrechts y Maejima 2000):

**Teorema 3.4** Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso de Lévy no trivial.

$\{X_t\}$  es H-autoafín si y sólo si  $\{X_t\}$  es estrictamente  $\alpha$ -estable ( $\alpha: 0 < \alpha \leq 2$ ).

En este caso,  $H = 1/\alpha$ .

♣

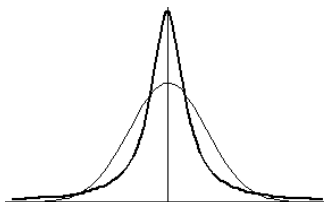


Figura 8: Las distribuciones estables con esperanza finita están comprendidas entre la distribución normal ( $\alpha=2$ ), que tiene esperanza y varianza finita, y la distribución de Cauchy ( $\alpha = 1$ ), cuya esperanza y varianza son infinitas.

Como este teorema hace que las distribuciones estables sean las únicas posibles en los procesos autoafines con incrementos independientes, el movimiento L-estable o proceso estable de Pareto-Lévy que veremos posteriormente es el único proceso autoafín con incrementos independientes que puede generalizar al movimiento browniano.

## 4. GENERALIZACIONES AUTOAFINES DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

El movimiento browniano clásico se define como un proceso que comienza en el origen casi seguro, cuyos incrementos son independientes y están idénticamente distribuidos según una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal.

**Definición 4.1:** Un **movimiento browniano**, BM (del inglés *Brownian Motion*), es un proceso estocástico,  $\{B(t): t \geq 0\}$ , que comienza en el origen casi seguro y verifica:

- El proceso tiene incrementos independientes.
- $\forall t \geq 0 \forall h \geq 0 \quad B(t+h)-B(t) \sim N(0, \sigma^2 h)$

Para  $\sigma=1$  diremos que es un movimiento browniano estándar. ♣

Como la distribución de los incrementos del proceso sólo depende del incremento temporal, los incrementos son estacionarios y, en particular, se tiene:

$$B(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \quad \forall t \geq 0.$$

El siguiente teorema muestra que si en el movimiento browniano cambiamos la escala temporal en un factor  $a > 0$  y la escala espacial en un factor  $a^{1/2}$  se obtiene un proceso indistinguible del original (Embrechts y Maejima 2000):

**Teorema 4.2:** Sean  $\{B(t) : t \geq 0\}$  un movimiento browniano y  $a > 0$ :

$$B(at) \equiv a^{1/2} B(t).$$

Es decir, el movimiento browniano es autoafín con exponente de autoafinidad  $1/2$ . ♣

La dimensión no entera de su grafo es otra característica del movimiento browniano que permite incluirlo dentro de los procesos fractales (Falconer 1990 pp. 244-245):

**Proposición 4.3:** Sea  $\{B(t) : t \geq 0\}$  un movimiento browniano.

El grafo en el intervalo  $[0,1]$ , casi seguro, tiene dimensión de recuento por cajas

$$D=2-1/2=1.5$$

♣

#### 4.1. El Movimiento Browniano Fraccionario

El movimiento browniano fraccionario es la generalización del movimiento browniano obtenida cuando suprimimos la independencia de sus incrementos y mantenemos la normalidad de la distribución que siguen, de forma que la varianza en vez de ser proporcional al incremento temporal,  $h$ , lo es a una potencia suya,  $h^{2H}$ , donde el exponente  $H$ ,  $0 < H < 1$ , recibe el nombre de índice del proceso.

**Definición 4.4** Un **movimiento browniano fraccionario** de índice  $H$ ,  $0 < H < 1$ , es un proceso estocástico  $\{B_H(t) : t \geq 0\}$  verificando:

- El proceso comienza en el origen casi seguro.
- $\forall t \geq 0, \forall h \geq 0 \quad B_H(t+h)-B_H(t) \sim N(0, \sigma^2 h^{2H})$ .

Para  $\sigma=1$  diremos que es un movimiento browniano fraccionario estándar. ♣

Como la distribución de los incrementos del proceso, al igual que en el clásico, sólo depende del incremento temporal, los incrementos son estacionarios y, en particular, se tiene:

$$B_H(t) \sim N(0, \sigma^2 h^{2H}), \quad \forall t \geq 0.$$

Cuando el índice del proceso toma el valor  $1/2$  el proceso coincide con el movimiento browniano clásico, único caso con incrementos independientes. En el resto de los casos, los incrementos son dependientes y según el tipo de dependencia se clasifican en:

- **movimientos brownianos fraccionarios persistentes**,  $1/2 < H < 1$ , en los cuales los incrementos correspondientes a los intervalos  $[0,t]$  y  $[t,t+h]$  tienden a ser del mismo signo, con lo que si ha crecido en un intervalo tiende a aumentar en el siguiente, o a disminuir si ha decrecido en el otro.



- **movimientos brownianos fraccionarios anti-persistentes**,  $0 < H < 1/2$ , en los cuales los incrementos correspondientes a los intervalos  $[0, t]$  y  $[t, t+h]$  tienden a ser de distinto signo, con lo que si ha crecido en un intervalo tiende a disminuir en el siguiente, o a aumentar si ha decrecido en el otro.

La característica fractal de invarianza de la distribución bajo un cambio adecuado de escala en el tiempo y el espacio generaliza el resultado obtenido para el movimiento browniano clásico (Embrechts y Maejima 2000):

**Proposición 4.5** Sean  $\{B_H(t) : t \geq 0\}$  un movimiento browniano fraccionario de índice  $H$  ( $0 < H < 1$ ) y  $a > 0$ .

$$B_H(at) \cong a^H B_H(t).$$

Es decir, el movimiento browniano fraccionario es un proceso autoafín cuyo exponente de autoafinidad coincide con el índice del proceso. ♣

La dimensión no entera de su grafo es otra característica fractal que el movimiento browniano fraccionario comparte con el clásico (Falconer 1990 pp. 246-247):

**Proposición 4.6** Sea  $\{B_H(t) : t \geq 0\}$  un movimiento browniano fraccionario de índice  $H$ .

El grafo en el intervalo  $[0, 1]$ , casi seguro, tiene dimensión de recuento por cajas

$$D = 2 - H \quad (1 < D < 2).$$

♣

## 4.2. El Movimiento L-estable o Proceso Estable de Pareto-Lévy

Como las distribuciones estables sean las únicas posibles en los procesos autoafines con incrementos independientes y estacionarios, el movimiento L-estable es el único proceso con características autoafines que puede generalizar al movimiento browniano. Este proceso se obtiene al considerar que sus incrementos siguen una distribución estable con exponente característico  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ , en lugar de una distribución normal que es estable con  $\alpha=2$  (como se considera que no tiene tendencia, el parámetro de localización,  $\mu$ , que en la distribución normal es la media, se toma como cero):

**Definición 4.7** Un **movimiento L-estable** o **proceso estable de Pareto-Lévy** es un proceso estocástico  $\{L_{\alpha, \beta}(t) : t \geq 0\}$  que comienza en el origen (casi seguro) y verifica:

- El proceso tiene incrementos independientes.
- $\forall t \geq 0, \forall h \geq 0: L_{\alpha, \beta}(t+h) - L_{\alpha, \beta}(t) \sim S_{\alpha, \beta}(0, \gamma h)$ .

♣

El parámetro de escala de la distribución,  $\gamma$ , va a establecer la proporcionalidad de los incrementos del movimiento L-estable con el incremento temporal, análogamente al movimiento browniano clásico, único caso con varianza finita ( $\alpha=2$ ), donde con la sustitución  $\gamma = \sigma^2/2$ , la distribución de los incrementos es normal con media cero y varianza  $\sigma^2 h$ . El exponente característico del proceso coincide con el exponente característico de la distribución,  $\alpha$  y, por tanto, en un movimiento L-estable no browniano,  $\alpha < 2$ , la varianza será infinita. Además, como este exponente también determina el tamaño de las colas, las colas de un movimiento L-estable no browniano,  $\alpha < 2$ , serán mayores que en el movimiento browniano,  $\alpha=2$ .

Como los incrementos del proceso están idénticamente distribuidos y sólo dependen del incremento temporal, los incrementos del proceso son estacionarios y, al comenzar en el origen, se tiene:

$$L_{\alpha,\beta}(t) \sim S_{\alpha,\beta}(0, \gamma t), \quad \forall t \geq 0.$$

Como dentro de los procesos de Lévy autoafines la distribución tiene que ser estrictamente estable y cuando  $\alpha$  es igual a uno la distribución es estrictamente estable sólo si es simétrica, vamos a imponer que en este caso lo sea (si el exponente característico de la distribución es distinto de uno siempre es estrictamente estable, ya que el parámetro de localización,  $\mu$ , es cero):

**Proposición 4.8** Sean  $\{L_{\alpha,\beta}(t): t \geq 0\}$  un movimiento L-estable con exponente característico  $\alpha$ , simétrico para  $\alpha=1$ , y  $a>0$ :

$$L_{\alpha,\beta}(t) \cong a^{-1/\alpha} L_{\alpha,\beta}(a t)$$

Es decir, el proceso es autoafín con exponente de autoafinidad  $H=1/\alpha$ . ♣

La dimensión de los registros temporales del movimiento L-estable nos interesa en el caso  $1<\alpha\leq 2$ , donde el proceso tiene esperanza finita, ya que en el caso  $0<\alpha\leq 1$ , donde la esperanza es infinita, este grafo tiene dimensión uno (Falconer 1990 pg. 249-250):

**Proposición 3.14** Sea  $\{L_t: t \geq 0\}$  un movimiento L-estable con esperanza finita,  $1<\alpha\leq 2$ :

El grafo en el intervalo  $[0,1]$ , casi seguro, tiene dimensión de recuento por cajas

$$D=2-1/\alpha=2-H,$$

con  $H$  el exponente de autoafinidad del proceso. ♣

## 5. CONCLUSIONES

Para describir la autoafinidad observada en la serie Ibex35, figura 3, un proceso que explique el comportamiento de la serie Ibex35 tiene que ser autoafín.

Como en un proceso autoafín las covarianzas entre los distintos instantes del proceso sólo tienen sentido cuando la varianza es finita y éstas únicamente dependen del exponente de autoafinidad del proceso, modelizamos la dependencia observada en la serie Ibex35, mediante un movimiento browniano fraccionario, cuyo grafo tiene dimensión de recuento por cajas  $D=2-H$ , donde  $H$  es el exponente de autoafinidad del proceso. La dimensión obtenida empíricamente,  $D=1.3663\pm 0.0202$ , corresponde a un exponente de autoafinidad  $H = 2-D = 0.6337 \pm 0.0202$ , que a su vez corresponde a un movimiento browniano fraccionario persistente con el mismo índice, en el cual la dependencia no llega a desaparecer.

Tanto las diferencias observadas entre la distribución empírica de los incrementos de la serie Ibex35 y la distribución correspondiente a una normal, como la inestabilidad de la varianza no se pueden modelizar mediante un movimiento browniano, clásico o fraccionario, ya que la distribución de sus incrementos es una normal y la varianza es proporcional al incremento temporal o a una potencia suya. Por lo que combinamos el movimiento browniano fraccionario con un movimiento L-estable. Estos movimientos tienen grafos con dimensión de recuento por cajas  $D=2-1/\alpha$ , donde  $\alpha$  es el exponente

característico del proceso, por lo que la dimensión obtenida empíricamente corresponde a un exponente característico  $\alpha = \frac{1}{2-D} = 1.5780 \pm 0.0520$ , que es menor que 2 y a su vez corresponde a una distribución estable no normal con esperanza finita y varianza infinita; lo que explicaría el tamaño de las colas y la inestabilidad de la varianza.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- L. Bachelier. Theory of speculation. En *The Random Character of Stock Market Prices*. Risk Books, 2000 (editor P. Cootner).
- P. Embrechts y M. Maejima. An introduction to the theory of self-similar stochastic processes. *International Journal of Modern Physics B*, 14(12-13):1399--1420, 2000.
- K. J. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 1990.
- E. F. Fama. Mandelbrot and the stable paretian hypothesis. *The Journal of Business*, 36:420--429, October 1963.
- W. Feller. *Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, vol. II. Limusa, 1978.
- J. Lamperti. Semi-stable stochastic processes. *Trans. of the American Math. Society*, 104:62--78, 1962.
- B. B. Mandelbrot. The pareto-lévy law and the distribution of income. *Int. Economic Review*, 1:79--106, 1960.
- B. B. Mandelbrot. The variation of certain speculatives prices. *The Journal of Business*, 36:394--419, October 1963.
- B. B. Mandelbrot. *Fractals and Scaling in Finance*. Springer-Verlag, 1997.
- B. B. Mandelbrot. *Gaussian Self-Affinity and Fractals*. Springer-Verlag, 2001.
- B. B. Mandelbrot y J. W. Van Ness. Fractional brownian motions, fracional noises and applications. *SIAM Review*, 10:422--437, 1968.
- J. Muñoz San Miguel. *La dimensión fractal en el mercado de capitales*. Tesis doctoral. Dpto. Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla, 2002.
- M. F. M. Osborne. Brownian motion in the stock market. *Operations Research*, 7:145--173, 1959.
- V. V. Petrov. *Sums of Independent Random Variables*. Springer-Verlag, 1975.
- Paul A. Samuelson. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6:13--31, 1965.

A. N. Shiryaev. *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, vol. 3 de *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. World Scientific, 1999.

P. Todorovic. *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications*. Springer-Verlag, 1992.